Ecriture et simplification des fonctions logiques

Groupe et opérateur complets, complétude du NAND (NOR), formes canoniques, théorèmes d'expansion de Shannon, simplification algèbrique et tabulaire, aléa de propagation.

Ecriture des équations logiques

Définitions : Apparition d’une variable = Lettre

Produit de variables sous forme simple ou complémentées = Monôme

Somme de monômes = Polynôme

$z = a + \overline{b.c.(d + e)}$ Expression algébrique

$= a + \overline{b} + \overline{c} + \overline{(d + e)}$ Développement

$= a + \overline{b} + \overline{c} + \overline{d} \, . \, \overline{e}$ Polynôme de 4 monômes de 1 et 2 lettres

Groupe d’opérateur complet

Toute fonction logique peut s’écrire avec les opérateurs ET, OU et NON (par définition).

Groupe d’opérateur complet : ensemble d’opérateur permettant d’exprimer toutes les fonctions logiques (GOC)

Corollaire : groupe d’opérateur permettant d’écrire ET, OU et NON

Opérateur complet : Opérateur qui forme un GOC

Complétude du NAND (NOR)

NAND et NOR offrent des performances techniques intéressantes.

NAND est un GOC

Preuve : $a \uparrow a = \overline{a}, (a \uparrow a) \uparrow (b \uparrow b) = a + b, (a \uparrow b) \uparrow (a \uparrow b) = a.b$

NOR est un GOC

Preuve : $a \downarrow a = \overline{a}, (a \downarrow a) \downarrow (b \downarrow b) = a.b, (a \downarrow b) \downarrow (a \downarrow b) = a + b$

Méthode d'obtention

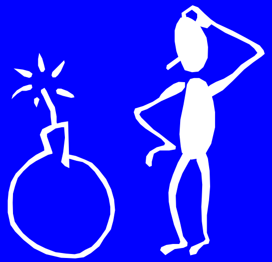
Somme de produits + 2 complémentations $\longrightarrow$ NAND

$$ab\bar{c}+a\bar{b}d+e=\overline{\overline{ab\bar{c}+a\bar{b}d+e}}=\overline{\overline{ab\bar{c}}.\overline{a\bar{b}d}.\bar{e}}$$

$$=(a\uparrow b\uparrow(c\uparrow c))\uparrow(a\uparrow(b\uparrow b)\uparrow d)\uparrow(e\uparrow e)$$

Produit de sommes + 2 complémentations $\longrightarrow$ NOR

$$(a+\bar{b}+c).(a+\bar{d})=\overline{\overline{(a+\bar{b}+c).(a+\bar{d})}}=\overline{\overline{(a+\bar{b}+c)}+\overline{(a+\bar{d})}}$$



$$=(a\downarrow(b\downarrow b)\downarrow c)\downarrow(a\downarrow(d\downarrow d))$$

Le calcul mal entrepris peut être TRES fastidieux

Formes canoniques (1)

Une fonction est sous forme canonique (ou normale) si chaque terme contient toutes les variables. L'écriture sous forme canonique est unique.

Exemples: $$f(x,y,z) = \underbrace{x.y.z}_{\text{Minterme ou intersection de base}} + \overline{x}.\overline{y}.z + \overline{x}.y.z$$

Première forme canonique ou forme normale disjonctive

$$f(x,y,z) = \underbrace{(x+\overline{y}+z)}_{\text{Maxterme ou réunion de base}}.(\overline{x}+y+\overline{z})$$

Deuxième forme canonique ou forme normale conjonctive

Formes canoniques (2)

Si la fonction n'est pas sous forme normale

i.e. une des variables (au moins) ne figure pas dans un des termes

$\longrightarrow$ La fonction est sous une forme simplifiée

$f(x,y,z) = xyz + \bar{x}y\bar{z} + xy\bar{z}$ Première forme canonique

$= xy(z+\bar{z}) + \bar{x}y\bar{z}$ Forme simplifiée

$= y(x+\bar{x}\bar{z})$ Forme simplifiée

$= y(x+\bar{z})$ Forme simplifiée

Première forme : obtention (1)

Premier thèorème d'expansion de shannon :

$$F(a,b,c.,..) = a.F(1,b,c,...) + \overline{a}.F(0,b,c...)$$

Première forme : obtention (2)

Premier thèorème d'expansion de shannon :

$$F(a,b,c.,..) = a.F(1,b,c,...) + \overline{a}.F(0,b,c...)$$

Si a = 1 : $F(1,b,c.,..) = 1.F(1,b,c,...) + 0.F(0,b,c...)$

Première forme : obtention (3)

Premier thèorème d’expansion de shannon :

$$F(a,b,c.,..) = a.F(1,b,c,...) + \overline{a}.F(0,b,c...)$$

Si a = 1 : $F(1,b,c.,..) = \quad F(1,b,c,...) + \cancel{0.F(0,b,c...)}$

Première forme : obtention (4)

Premier thèorème d'expansion de shannon :

$$F(a,b,c.,..) = a.F(1,b,c,...) + \overline{a}.F(0,b,c...)$$

Pour 2 variables :

$$F(a,b) = a.F(1,b) + \overline{a}.F(0,b)$$

Première forme : obtention (5)

Premier thèorème d'expansion de shannon :

$$F(a,b,c.,..) = a.F(1,b,c,...) + \overline{a}.F(0,b,c...)$$

Pour 2 variables :

$$F(a,b) = a.F(1,b) + \overline{a}.F(0,b)$$

$$F(a,b) = a.(b.F(1,1) + \overline{b}.F(1,0)) + \overline{a}.(b.F(0,1) + \overline{b}.F(0,0))$$

Première forme : obtention (6)

Premier théorème d'expansion de shannon :

$$F(a,b,c.,..) = a.F(1,b,c,...) + \overline{a}.F(0,b,c...)$$

Pour 2 variables :

$$F(a,b) = a.F(1,b) + \overline{a}.F(0,b)$$

$$F(a,b) = a.(b.F(1,1) + \overline{b}.F(1,0)) + \overline{a}.(b.F(0,1) + \overline{b}.F(0,0)$$

$$F(a,b) = a.b.F(1,1) + a.\overline{b}.F(1,0) + \overline{a}.b.F(0,1) + \overline{a}.\overline{b}.F(0,0)$$

Première forme : obtention (7)

Premier théorème d'expansion de shannon :

$$F(a,b,c.,..) = a.F(1,b,c,...) + \overline{a}.F(0,b,c...)$$

Pour 2 variables :

$$F(a,b) = a.F(1,b) + \overline{a}.F(0,b)$$

$$F(a,b) = a.(b.F(1,1) + \overline{b}.F(1,0)) + \overline{a}.(b.F(0,1) + \overline{b}.F(0,0)$$

$$F(a,b) = a.b.\underline{F(1,1)} + a.\overline{b}.F(1,0) + \overline{a}.b.F(0,1) + \overline{a}.\overline{b}.F(0,0)$$

Point particulier de la fonction F vaut 0 ou 1

Première forme : mise en oeuvre

$$F(a,b) = a.b.F(1,1) + a.\overline{b}.F(1,0) + \overline{a}.b.F(0,1) + \overline{a}.\overline{b}.F(0,0)$$

Pour chaque i,j le point de la fonction F(i,j) dépend du problème

a b	F	
0 0	0	F(0,0)
0 1	1	F(0,1)
1 0	1	F(1,0)
1 1	0	F(1,1)

$$\Longrightarrow \quad F(a,b) = \overline{a}.b + a.\overline{b}$$

La première forme canonique ne laisse apparaître que les termes qui valent 1

Il y a 2^N mintermes possibles. La somme des 2^N mintermes vaut 1. (fonction valant 1 partout)

Deuxième forme : obtention

Deuxième théorème d'expansion de Shannon :

$$F(a,b,c,\ldots) = (a + F(0,b,c,\ldots)).(\overline{a} + F(1,b,c,\ldots))$$

Si a=0 : $F(0,b,c,\ldots) = (0 + F(0,b,c\ldots)).(1 + F(1,b,c,\ldots))$

$\uparrow$ neutre +

$\uparrow$ absorbant + neutre .

Pour deux variables :

$$F(a,b) = (a + b + F(0,0)).(\overline{a} + b + F(1,0)).$$
$$(a + \overline{b} + F(0,1)).(\overline{a} + \overline{b} + F(1,1))$$

Deuxième forme : mise en oeuvre

$$F(a,b) = (a + b + F(0,0)).(\overline{a} + b + F(1,0)).$$
$$(a + \overline{b} + F(0,1)).(\overline{a} + \overline{b} + F(1,1))$$

a b	F	
$\boxed{0\ 0}$	0	F(0,0)
0 1	1	F(0,1)
1 0	1	F(1,0)
$\boxed{1\ 1}$	0	F(1,1)

$$\Longrightarrow \quad F(a,b) = (a + b).(\overline{a} + \overline{b})$$

Que les termes valant 0

Il y a 2^N maxtermes possibles. La somme des 2^N maxtermes vaut 0. (fonction valant 0 partout)

Formes canoniques : Choix

Première forme canonique = expression des 1 de la fonction

Deuxième forme canonique = expression des 0 de la fonction

Les deux formes canoniques sont équivalentes

On choisit celle qui donne le résultat le plus simple

peu de 0 => deuxième forme / peu de 1 => première forme

Les formes numériques

Raccourci d'écriture !

a	b	F	
0	0	0	F(0,0)
0	1	1	F(0,1)
1	0	1	F(1,0)
1	1	0	F(1,1)

1ère forme : F(a,b) = R(1,2)
2ème forme : F(a,b) = I(0,3)

R = Réunion   I = Intersection

a = msb (Most Significant Bit)
b = lsb (least Significant Bit)
bit = BInary digIT

$$(abcd)_2 = a*2^3 + b*2^2 + c*2^1 + d*2^0$$

Fonction incomplètement définie

Si une combinaison d'entrée ne peut pas se présenter
ou si pour cette combinaison la valeur de la fonction n'est pas importante, on dit que la fonction n'est pas définie en ce point.

$$F(a,b,c) = \phi \quad \text{(ou x ou -)}$$

Ce point peut être remplacé par 1 ou 0 en fonction des besoins de simplification.

Simplification des fonctions

Objectif : Fabriquer un système

et/ou

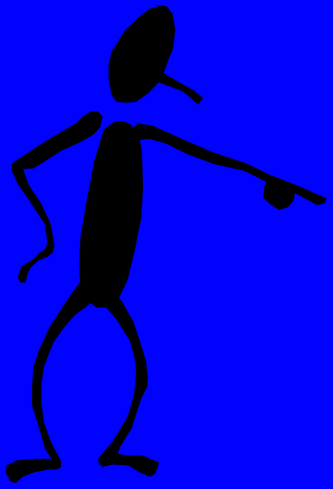
- à moindre coût
- rapide
- fiable
- peu consommateur

Méthodes : Algébriques
Graphiques
Programmables

Résultat : on cherche la forme minimale d'une fonction
nombre minimal de monômes/nombre minimal de lettre par monôme

Possibilité de plusieurs formes minimales : formes équivalentes

Simplification : avertissement



La forme mathématique la plus simple ne correspond pas toujours à la réalisation la plus simple
et/ou la plus rapide.

La prise en compte de contraintes technologiques peut imposer une complexification d’écriture de l’expression.

Simplification : définitions

Décomposition : Problème général de la réalisation d'une fonction logique à l'aide d'opérateurs

Transformation : Passage d'une forme à une autre forme équivalente

Simplification : cas particulier d'une transformation quand on passe d'une forme canonique à une forme minimale.

Simplification algébrique (1)

Applications des principes et propriétés de l'algèbre de Boole

Identités remarquables : 1 $\quad a.b+\overline{a}.b=b \qquad (a+b).(\overline{a}+b)=b$

2 $\quad a + a.b = a \qquad a.(a+b) = a$

3 $\quad a + \overline{a}.b = a+b \qquad a.(\overline{a}+b)=a.b$

Démonstrations : 1 et 2 trivial

3 : $a+\overline{a}.b=\underbrace{a.a+a.b}_{a}+\underbrace{a.\overline{a}}_{0}+\overline{a}.b=(a+\overline{a}).(a+b)=a+b$

Simplification algébrique (2)

Règles de simplification : (Mintermes adjacents = 1 seule variable qui change)

1 : Deux mintermes adjacents $\longrightarrow$ Il reste l'intersection commune
1': Deux maxtermes adjacents $\longrightarrow$ Il reste la réunion commune

$$a.b.c + a.b.\overline{c} = a.b.(c + \overline{c}) = a.b$$

$$(a + b + c).(a + b + \overline{c}) = (a + b)(c + \overline{c}) = a + b$$

2 : On ajoute des termes neutres ou déjà existant (idempotence)
3 : théorème du consensus
4 : On simplifie la forme canonique ayant le moins de termes

Méthode algébrique toujours possible mais démarche intuitive qui dépend de l'habileté et de l'expérience.

Simplification graphique (1)

Principe : Mettre en évidence sur un graphique les mintermes (ou maxtermes) adjacents. Transformer les adjacences logiques en adjacences «géométriques».

Trois phases : transcrire la fonction dans un tableau codé
recherche des adjacents pour simplification
équations des groupements effectués

Description : Table de vérité vs Tableau de Karnaugh

Table de vérité	Tableau de Karnaugh
1 ligne	1 case
n variables	2^n cases

Simplification graphique (2)

Code Gray ou binaire réfléchi : code à symétries multiples

Construction 0
1

Simplification graphique (3)

Code Gray ou binaire réfléchi : code à symétries multiples

Construction

0
1
———
1
0

Symétrie

«Miroir»

Simplification graphique (4)

Code Gray ou binaire réfléchi : code à symétries multiples

Construction

0 0	On complète par des 0
0 1	
1 1	On complète par des 1
1 0	

Simplification graphique (5)

Code Gray ou binaire réfléchi : code à symétries multiples

Construction

0 0
0 1
1 1
1 0
---
1 0
1 1
0 1
0 0

Symétrie

Simplification graphique (6)

Code Gray ou binaire réfléchi : code à symétries multiples

Construction

0 0 0	
0 0 1	
0 1 1	On complète par des 0
0 1 0	
1 1 0	
1 1 1	On complète par des 1
1 0 1	
1 0 0	

Simplification graphique (7)

Code Gray ou binaire réfléchi : code à symétries multiples

Propriétés

distance unité

0 0 0
0 0 1
0 1 1
0 1 0
1 1 0
1 1 1
1 0 1
1 0 0

Cyclique

Monôme de n symboles = n adjacents $\longrightarrow$ multisymétrie du code

Tableau de Karnaugh : codage lignes et colonnes par code Gray

Simplification graphique (8)

Exemple 1: Depuis une table de vérité

a b c	f
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	1
0 1 1	1
1 0 0	0
1 0 1	0
1 1 0	0
1 1 1	0

a \ bc	00	01	11	10
0		1		
1				

Simplification graphique (9)

Exemple 1 Depuis une table de vérité

a b c	f
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	1
0 1 1	1
1 0 0	0
1 0 1	0
1 1 0	0
1 1 1	0

a \ bc	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	0	0	0	0

Simplification graphique (10)

Exemple 1 : Depuis une table de vérité

a b c	f
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	1
0 1 1	1
1 0 0	0
1 0 1	0
1 1 0	0
1 1 1	0

a \ bc	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	0	0	0	0

3 lettres = 3 adjacents

! Haut et Bas / Gauche et Droite liés (tore de Karnaugh)

Simplification graphique (11)

Exemple 2 : Par une première forme canonique (Par les 1)

a \ bc	00	01	11	10
0		1	1	
1			1	

$$f(a,b,c) = \overline{a}.\overline{b}.c + \overline{a}.b.c + a.b.c$$

Simplification graphique (12)

Exemple 2 : Par une deuxième forme canonique (Par les 0)

a \ bc	00	01	11	10
0	0			
1		0		0

$$f(a,b,c) = (a+b+c).(\overline{a}+b+\overline{c}).(\overline{a}+\overline{b}+c)$$

Simplification graphique (13)

Règles de simplification

1 : Les groupements comportent une puissance de deux cases,
2 : Les 2^k cases forment un rectangle,
3 : Un groupement de 2^k cases correspond à une simplification de k variables et s'écrit avec (n-k) lettres,
4 : Il faut utiliser au moins une fois chaque 1, le résultat est donné par la réunion logique de chaque groupement,
5 : Expression minimale si :

- les groupements les plus grands possibles
- utiliser les 1 un minimum de fois

6 : Codage d'un groupe par les 1 :

- n'apparaît que les variables fixes dans le groupement
- forme simple si la variable vaut 1/ complémentée sinon

Simplification graphique (14)

a \ bc	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	1	1	0

Choix d’un 1 et recherche
des adjacents contenant un 1

Simplification graphique (15)

Il faut essayer de maximiser les groupements

a \ bc	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	1	1	0

Recherche d'un ensemble de deux cases adjacent contenant des 1

Echec

Simplification graphique (16)

Autre groupement

a \ bc	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	1	1	0

On choisit un des 1 restant et
recherche des 1 adjacents

Simplification graphique (17)

Maximisation groupement

a \ bc	00	01	11	10	
0	0	1	1	0	0
1	1	1	1	0	

Choix d’un 1 adjacent et recherche
d’un groupement adjacent

OK !

Simplification graphique (18)

Tous les 1 sont groupés !

a \ bc	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	1	1	0

Equation :

$$F(a,b,c) = a.\overline{b} + c$$

Simplification graphique (19)

Par les 0

a \ bc	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	1	1	0

Equation :

$$F(a,b,c) = (a+c).(\overline{b}+c)$$

Limites de la méthode

Difficile avec plus de 6 variables

- Interêt pédagogique
- Les problèmes sont toujours découpables en pb plus petits

Pas programmable (autres méthodes : Mc Cluskey, Sheinman, Tison)
Temps pas pris en compte
Difficile minimiser plusieurs fonctions conjointement

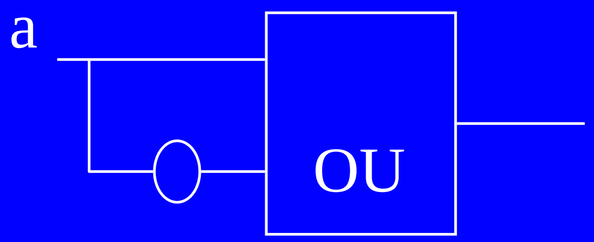
Problème de l’aléa de propagation : si deux groupes sont adjacents

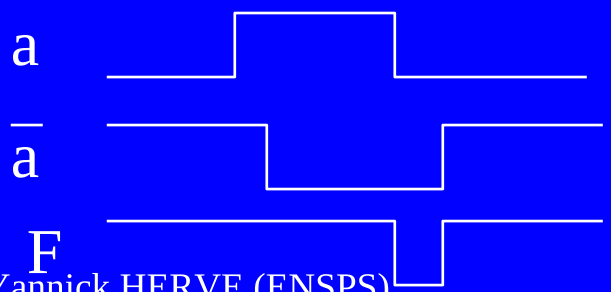
L'aléa de propagation : problème

a \ bc	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	1	0	0

$$F = a.\overline{b} + \overline{a}.c$$

Si b=0, c=1 $F = a + \overline{a}$ = 1 mathématiquement





Retard techno

L’aléa de propagation : solution

a \ bc	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	1	0	0

$$F = a.\bar{b} + \bar{a}.c + \underline{b.c}$$

Si b=0, c=1 $F = a + \bar{a} + 1$ = 1 mathématiquement et technologiquement

C’est le théorème du consensus

Exercice 1

abc \ def	000	001	011	010	110	111	101	100
000	-	0	0	1	-	0	0	1
001	0	0	-	0	0	0	0	0
011	0	0	-	0	0	0	0	0
010	-	0	0	1	1	-	0	-
110	-	0	0	1	-	0	0	-
111	0	0	-	0	0	-	0	0
101	0	-	0	0	0	0	0	-
100	-	0	0	1	1	0	0	1

Exercice 1 : démarche (1)

abc \ def	000	001	011	010	110	111	101	100
000	-	0	0	1	-	0	0	1
001	0	0	-	0	0	0	0	0
011	0	0	-	0	0	0	0	0
010	-	0	0	1	1	-	0	-
110	-	0	0	1	-	0	0	-
111	0	0	-	0	0	-	0	0
101	0	-	0	0	0	0	0	-
100	-	0	0	1	1	0	0	1

- Plus de 1 ou de 0 ?
- Choix d'un 1
- Recherche des adjacents

Adjacents éligibles ?

Si oui groupement

Groupement «augmentable» ?

Exercice 1 : démarche (2)

abc \ def	000	001	011	010	110	111	101	100
000	-	0	0	1	-	0	0	1
001	0	0	-	0	0	0	0	0
011	0	0	-	0	0	0	0	0
010	-	0	0	1	1	-	0	-
110	-	0	0	1	-	0	0	-
111	0	0	-	0	0	-	0	0
101	0	-	0	0	0	0	0	-
100	-	0	0	1	1	0	0	1

- Plus de 1 ou de 0 ?
- Choix d'un 1
- Recherche des adjacents
- Adjacents éligibles ?
- Si oui groupement

Groupement «augmentable» ?

Exercice 1 : démarche (3)

abc \ def	000	001	011	010	110	111	101	100
000	-	0	0	1	-	0	0	1
001	0	0	-	0	0	0	0	0
011	0	0	-	0	0	0	0	0
010	-	0	0	1	1	-	0	-
110	-	0	0	1	-	0	0	-
111	0	0	-	0	0	-	0	0
101	0	-	0	0	0	0	0	-
100	-	0	0	1	1	0	0	1

- Plus de 1 ou de 0 ?
- Choix d'un 1
- Recherche des adjacents
- Adjacents éligibles ?
- Si oui groupement
- Groupement «augmentable» ?

Exercice 1 : démarche (4)

abc \ def	000	001	011	010	110	111	101	100
000	-	0	0	1	-	0	0	1
001	0	0	-	0	0	0	0	0
011	0	0	-	0	0	0	0	0
010	-	0	0	1	1	-	0	-
110	-	0	0	1	-	0	0	-
111	0	0	-	0	0	-	0	0
101	0	-	0	0	0	0	0	-
100	-	0	0	1	1	0	0	1

- ✓ Plus de 1 ou de 0 ?
- ✓ Choix d'un 1
- ✓ Recherche des adjacents
- ✓ Adjacents éligibles ?
- ✓ Si oui groupement
- ✓ Groupement «augmentable» ?

Exercice 1 : démarche (5)

abc \ def	000	001	011	010	110	111	101	100
000	-	0	0	1	-	0	0	1
001	0	0	-	0	0	0	0	0
011	0	0	-	0	0	0	0	0
010	-	0	0	1	1	-	0	-
110	-	0	0	1	-	0	0	-
111	0	0	-	0	0	-	0	0
101	0	-	0	0	0	0	0	-
100	-	0	0	1	1	0	0	1

- ☑ Plus de 1 ou de 0 ?
- ☑ Choix d'un 1
- ☑ Recherche des adjacents
- ☑ Adjacents éligibles ?
- ☑ Si oui groupement

☑☑☑ Groupement «augmentable» ?

Exercice 1 : solution

abc \ def	000	001	011	010	110	111	101	100
000	-	0	0	1	-	0	0	1
001	0	0	-	0	0	0	0	0
011	0	0	-	0	0	0	0	0
010	-	0	0	1	1	-	0	-
110	-	0	0	1	-	0	0	-
111	0	0	-	0	0	-	0	0
101	0	-	0	0	0	0	0	-
100	-	0	0	1	1	0	0	1

1 seul groupement

$$H = \overline{c}.\overline{f}$$

Exercice 2

abc \ def	000	001	011	010	110	111	101	100
000	1	1	0	0	1	1	1	-
001	1	1	1	1	-	1	1	1
011	1	1	1	1	1	1	-	1
010	1	1	0	0	-	1	1	1
110	1	1	0	0	1	1	-	1
111	1	1	1	1	-	1	1	1
101	1	1	1	1	1	1	1	1
100	1	1	0	0	1	1	1	1

Exercice 2 : solution

abc \ def	000	001	011	010	110	111	101	100
000	1	1	0	0	1	1	1	-
001	1	1	1	1	-	1	1	1
011	1	1	1	1	1	1	-	1
010	1	1	0	0	-	1	1	1
110	1	1	0	0	1	1	-	1
111	1	1	1	1	-	1	1	1
101	1	1	1	1	1	1	1	1
100	1	1	0	0	1	1	1	1

$$H = c + d + \overline{e}$$

Détails du calcul (1)

$$a \uparrow a = \overline{a . a} = \overline{a} + \overline{a} = \overline{a}$$

$$(a \uparrow b) \uparrow (a \uparrow b) = \overline{(\overline{a.b}).(\overline{a.b})} = \overline{\overline{a.b}} + \overline{\overline{a.b}} = a.b$$